平成２２年度 編入学試験問題

数 学

２００９年１０月２１日（９：００ ～ １１：００）

$\boxed{1}$ 次の行列の行列式を計算せよ．

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{2}$ 次のような $\mathbb{R}^4$ の部分空間を考える．

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; a+b-c-d=0,\ 3a-b-c+3d=0 \right\}.$$

(1) ベクトル空間の部分空間とはどういう意味か．部分空間の定義を述べよ．

(2) V が $\mathbb{R}^4$ の部分空間であることを示せ．今述べた部分空間の定義に即して説明せよ．

(3) ベクトル空間の基底とはどういう意味か．基底の定義を述べよ．

(4) 次の二つのベクトルがこの V の基底であることを示せ（今述べた基底の定義に即して説明せよ）．

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{3}$ $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \to \bar{z}$ という写像を考える（ただし $\bar{z}$ は z の複素共役）．

(1) $\mathbb{C}$ を複素ベクトル空間とみなすと f は線形写像でない．このことを示せ．

(2) $\mathbb{C}$ を実ベクトル空間とみなすと f は線形写像である．このことを示せ．

$\boxed{4}$ 次の各問いに答えよ.

(1) 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(x+1)\mathrm{Tan}^{-1}\frac{1}{x}$ を求めよ. ただし, Tan^{-1} は $\tan$ の逆関数である.

(2) 広義積分 $\displaystyle\int_e^{\infty}\frac{1}{x(\log x)^2}\,dx$ を計算せよ.

$\boxed{5}$ 次の関数の極値を求めよ.

$$f(x,y)=x^3+y^3-3xy$$

$\boxed{6}$ 次の重積分の値を求めよ.

$$\iint_D (x^2+y)\,dxdy$$

ただし, $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}\leq 1,\ y\geq 0\right\}$ とする.

平成２２年度 編入学試験問題・解答例

数 学

２００９年１０月２１日（９：００～１１：００）

$\boxed{1}$ 9.

$\boxed{2}$ (1) ベクトル空間Vの空でない部分集合が和とスカラー倍で閉じているとき, この部分集合をVの部分空間と呼ぶ.

(2) 略.

(3) $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n \in V$ について, 次が成り立つとき $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ はVの基底であるという.

- $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ は一次独立.
- Vの任意の元は $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ の一次結合で表される.

(4) 略.

$\boxed{3}$ (1) 略.

(2) 略.

$\boxed{4}$

(1) ロピタルの定理を用いて

$$(\text{与式}) = \lim_{x\to\infty} \frac{\mathrm{Tan}^{-1}\frac{1}{x}}{\frac{1}{x+1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{-\frac{1}{x^2+1}}{-\frac{1}{(1+x)^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{(x+1)^2}{x^2+1} = 1 \cdots\cdots (\text{解})$$

(2) $\log x = t$ とおくと, $\dfrac{1}{x}dx = dt$ であるから

$$(\text{与式}) = \lim_{K\to\infty} \int_e^K \frac{1}{x(\log x)^2}\,dx = \lim_{K\to\infty} \int_1^{\log K} \frac{1}{t^2}\,dt = \lim_{K\to\infty} \left[-\frac{1}{t}\right]_1^{\log K} = 1 \cdots (\text{解})$$

$\boxed{5}$

$$f_x = 3x^2 - 3y, \quad f_y = 3y^2 - 3x$$

であるから

$$\begin{cases} 3x^2 - 3y = 0 \\ 3y^2 - 3x = 0 \end{cases}$$

を解いて $(x,y)=(0,0)$, $(1,1)$ を得る．また

$$f_{xx}=6x,\ \ f_{xy}=f_{yx}=-3,\ \ f_{yy}=6y$$

であるから f のヘッシアン $H(f)$ は

$$H(f)=\begin{vmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{vmatrix}=36xy-9$$

したがって

$$H(f)(0,0)=-9<0,\ \ H(f)(1,1)=27>0$$

となるから $f(x,y)$ は $(0,0)$ で極値をもたない．また，$f_{xx}(1,1)=6>0$ であるから

$\underline{(x,y)=(0,0) \text{ で極小値 } f(0,0)=-1 \text{ をもつ}}$ ……（解）

$\boxed{6}$ 領域 D は

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2+\left(\frac{y}{3}\right)^2\leqq 1$$

で与えられる楕円の上半分の部分である．

$$\frac{x}{2}=r\cos\theta,\ \ \frac{y}{3}=r\sin\theta\ \ (0\leqq r\leqq 1,\ \ 0\leqq\theta\leqq\pi)$$

とおくと

$$dxdy=6r\ drd\theta$$

であるから

$$\begin{aligned}
\iint_D (x^2+y)dxdy &= 6\iint_{D'} r\left(4r^2\cos^2\theta+3r\sin\theta\right)drd\theta \\
&= 6\int_0^\pi\left[\int_0^1 r\left(4r^2\cos^2\theta+3r\sin\theta\right)dr\right]d\theta \\
&= 6\int_0^\pi\left[r^4\cos^2\theta+r^3\sin\theta\right]_0^1 d\theta \\
&= 6\int_0^\pi\left(\cos^2\theta+\sin\theta\right)d\theta \\
&= 3\int_0^\pi(1+\cos 2\theta+2\sin\theta)\,d\theta \\
&= 3\left[\theta+\frac{\sin 2\theta}{2}-2\cos\theta\right]_0^\pi \\
&= 3\pi+12 \cdots\cdots (\text{解})
\end{aligned}$$