平成23年度
鹿児島大学編入学試験
理学部数理情報科学学科

数学

平成22年10月20日(水)　9:00-11:00

注意.

1. 配布物は，問題冊子 (A4, 3 枚)，解答用紙 (B4, 5 枚)，草案用紙 (B4, 5 枚) です.
2. 試験開始の合図があるまで問題冊子を開いてはいけません.
3. 出題数は $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$, $\boxed{5}$ の5題で，5題とも解答してください.
4. 試験開始後，すべての解答用紙に受験番号を記入してください.
5. 解答用紙が不足する場合には裏面を使用することができます.
6. 問題冊子と草案用紙は持ち帰ってください.

$\boxed{1}$ 次の行列 A について，以下の各問いに答えよ．

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) 行列 A の固有値および各固有値に対する固有空間を求めよ

(2) 行列 A が対角化可能ならば，対角化せよ．すなわち，対角行列 D および $P^{-1}AP = D$ をみたす正則行列 P を求めよ．

$\boxed{2}$ 3 次の実係数多項式の全体

$$V = \{a + bx + cx^2 + dx^3 \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$$

は $\{1, x, x^2, x^3\}$ を基底とする 4 次元実ベクトル空間である．線型写像 $f : V \to V$ を

$$f(v) = \frac{d^2v}{dx^2} - 2x\frac{dv}{dx} + 6v, \quad v \in V$$

によって定義する．以下の各問いに答えよ．

(1) V の基底 $\{1, x, x^2, x^3\}$ に関する f の表現行列，すなわち，

$$\Big(f(1), f(x), f(x^2), f(x^3)\Big) = (1, x, x^2, x^3)A$$

をみたす 4×4 行列 A を求めよ．

(2) $\mathrm{rank}\, f$ を求めよ．

(3) $\mathrm{Ker}\, f$ を求めよ．

$\boxed{3}$ 次の極限値を求めよ.

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{x^2} - 1}{\cos x - 1}$$

$\boxed{4}$ 2変数関数 $f(x, y) = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$ の極値を論ぜよ.

$\boxed{5}$ 2変数関数 $f(x, y)$ を

$$f(x, y) = \begin{cases} x & (x \geqq y \text{ のとき}) \\ y & (x \leqq y \text{ のとき}) \end{cases}$$

とする. 次の重積分を求めよ.

$$\iint_D f(x, y)\,dxdy, \quad D = \{(x, y) \mid 0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 1\}$$

平成23年度鹿児島大学編入学試験
理学部数理情報科学科
数学の解答例

$\boxed{1}$ E を 3×3 の単位行列とする.

(1) まず A の固有値を求める. A の固有多項式は

$$\det(zE-A)=\det\begin{pmatrix} z & -2 & -2 \\ -2 & z & -2 \\ -2 & -2 & z \end{pmatrix}=z^3-12z-16=(z+2)^2(z-4)$$

であるから, A の固有値は -2 (重複度 2) と 4 である.
次に, 固有値 -2 に対する固有ベクトル ${}^t(x,y,z)$ を求める.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=-2(x+y+z)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

により $x+y+z=0$ を得る. この条件をみたすもののうち, 2つの1次独立なベクトルは, 例えば ${}^t(1,-1,0)$ と ${}^t(1,0,-1)$ がある. よって, -2 に対する固有空間 V_{-2} は以下のように表される:

$$V_{-2}=\left\{\alpha\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\ \middle|\ \alpha,\beta\in\mathbb{C}\right\}.$$

最後に, 4 に対する固有ベクトル ${}^t(\xi,\eta,\zeta)$ を求める.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}=2\begin{pmatrix} 2\xi-\eta-\zeta \\ -\xi+2\eta-\zeta \\ -\xi-\eta+2\zeta \end{pmatrix}$$

より $\xi=\eta=\zeta$ を得る. よって, 4 に対する固有空間 V_4 は以下のように表される:

$$V_4=\left\{\gamma\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\ \middle|\ \gamma\in\mathbb{C}\right\}.$$

(2) $\boldsymbol{a}_1={}^t(1,-1,0)$, $\boldsymbol{a}_2={}^t(1,0,-1)$, $\boldsymbol{a}_3={}^t(1,1,1)$ は1次独立であるから,

$$P=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

は正則行列であり,

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

となる.

$\boxed{2}$

(1) 単純計算により

$$f(1)=6,\quad f(x)=4x,\quad f(x^2)=2+2x^2\quad f(x^3)=6x$$

であるから,

$$A=\begin{pmatrix}6&0&2&0\\0&4&0&6\\0&0&2&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

である.

(2) A は上半三角行列であるから $\operatorname{rank} A=3$ であることは明らかであり，したがって $\operatorname{rank} f=3$ である.

(3) 連立一次方程式

$$\begin{pmatrix}6&0&2&0\\0&4&0&6\\0&0&2&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

を解くと $a=0, c=0, 2b+3d=0$ である．よって

$$\operatorname{Ker} f=\{\alpha(3x-2x^3)\mid \alpha\in\mathbb{R}\}$$

である.

$\boxed{3}$ テイラーの定理により, $x\to 0$ のとき,

$$e^{x^2}-1=x^2+\mathcal{O}(x^4),\quad \cos x-1=-\frac{x^2}{2}+\mathcal{O}(x^4),$$

である. よって,

$$\frac{e^{x^2}-1}{\cos x-1}=\frac{x^2+\mathcal{O}(x^4)}{-\dfrac{x^2}{2}+\mathcal{O}(x^4)}=\frac{-2+\mathcal{O}(x^2)}{1+\mathcal{O}(x^2)},$$

である. よって, 次を得る：

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{\cos x-1}=-2.$$

$\boxed{4}$ $(f_x, f_y) = (6x^2 + 10x + y^2, 2(x+1)y)$ であるから，極値点である可能性があるのは，$(0,0), (-5/3, 0), (-1, 2), (-1, -2)$ の 4 点である．

$$f'' = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12x + 10 & 2y \\ 2y & 2(x+1) \end{pmatrix}$$

である．

$$\det f''(0,0) = \det \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 20 > 0,$$

$$\det f''(-5/3, 0) = \det \begin{pmatrix} -10 & 0 \\ 0 & -4/3 \end{pmatrix} = \frac{40}{3} > 0,$$

$$\det f''(-1, \pm 2) = \begin{pmatrix} -2 & \pm 4 \\ \pm 4 & 0 \end{pmatrix} = -16 < 0$$

であるから，極値点になるのは $(0,0), (-5/3, 0)$ の 2 点であり，
$f(0,0) = 0$ は極小値，$f(-5/3, 0) = 125/27$ は極大値である．

$\boxed{5}$ D を分割して，$D = D_1 \cup D_2$，

$$D_1 = \{(x,y) \mid 0 \leqq x \leqq 1,\ x \leqq y \leqq 1\} = \{(x,y) \mid 0 \leqq y \leqq 1,\ 0 \leqq x \leqq y\},$$
$$D_2 = \{(x,y) \mid 0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq x\}$$

とする．単純計算により次を得る：

$$\begin{aligned} \iint_D f(x,y)dxdy &= \iint_{D_1} ydxdy + \iint_{D_2} xdxdy \\ &= \int_0^1 dy \int_0^y ydx + \int_0^1 dx \int_0^x xdy \\ &= \int_0^1 y^2 dy + \int_0^1 x^2 dx = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$