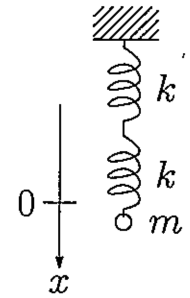
鹿児島大学　理学部　物理科学科　2012年度　編入学試験　（物理・数学）

1. 図のように，ばね定数 k のばね2本に繋がれた質量 m の質点がある。この質点の鉛直方向の運動について，次の各問いに答えなさい。ただし，座標軸 x は，ばねの自然長の位置を原点として鉛直下向きにとる。また，重力加速度を g とし，ばねの質量は無視できるものとする。



(a) ばね定数の単位を答えなさい。

(b) 質点のつり合いの位置を求めなさい。

(c) 運動方程式を記し，その一般解を答えなさい。

(d) 質点が時刻 $t=0$ につり合いの位置を $\dot{x}=v_0$ で通過した。この場合の解を求め，それを縦軸 x，横軸 t のグラフに表しなさい。

2. 真空中で原点 O に電荷 Q の点電荷が固定されている。次の各問いに答えなさい。ただし，真空の誘電率は ϵ_0 とする。

(a) 点 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$ での電場 $\boldsymbol{E}$ を Gauss の法則を用いて導きなさい。

(b) 電荷 q の点電荷が点 $\mathrm{A}(a,0,0)$ から点 $\mathrm{B}(0,b,0)$ まで移動する際，電場がした（電気力がした）仕事 W を求めなさい。

3. 理想気体を状態 A から B まで準静的に断熱圧縮し，続いて状態 B から状態 C まで準静的に等温膨張させ，状態 A と同じ体積にした。状態 A,B,C の温度を $T_{\mathrm{A}},T_{\mathrm{B}},T_{\mathrm{C}}$，圧力を $P_{\mathrm{A}},P_{\mathrm{B}},P_{\mathrm{C}}$，エントロピーを $S_{\mathrm{A}},S_{\mathrm{B}},S_{\mathrm{C}}$ とする。温度の大小関係，圧力の大小関係，エントロピーの大小関係をそれぞれ不等号 ($<$) と等号 ($=$) を用いて答えなさい。なお，簡単に理由も述べること。

鹿児島大学　理学部　物理科学科　2012年度　編入学試験（物理・数学）

4．以下の問にすべて解答しなさい。計算・論理過程も解答欄に書くこと。

問1　指数関数 e^x のベキ級数展開（マクローリン展開）を複素数に拡張することにより、オイラーの公式

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

が成り立つことを証明せよ。

問2　行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ。

問3　抵抗 R と電気容量 C のコンデンサを直列につないで起電力 $V(t)$ の電源と閉回路を作った場合、電流 $I(t)$ については以下の微分方程式が成り立つ。この微分方程式の一般解を求めよ。

$$R\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}I = \frac{dV}{dt}$$

鹿児島大学　理学部　物理科学科　2012 年度　編入学試験　(物理・数学)
解答例

1. (a) N/m　(kg/s^2 や dyn/cm^2 などでもよい)

(b) 作用反作用の法則より 2 つのばねの伸びは等しいので，質点が位置 x にあるとき，ばね 1 本の伸びは $x/2$ となる。従って，質点に働く力は $f_x = mg - kx/2$ で

$$x = x_* = 2mg/k$$

がつり合いの位置となる。

(c) 運動方程式は

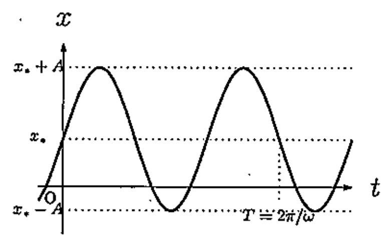
$$m\ddot{x} = f_x = -k\frac{x}{2} + mg = -k\frac{x - x_*}{2}$$

一般解は

$$x = x_* + A\sin(\omega t - \phi),\ \omega = \sqrt{k/2m},\ A, \phi \text{は積分定数}$$

(d) $\dot{x} = A\omega\cos(\omega t - \phi)$ なので，$t = 0$ で $x = x_*, \dot{x} = v_0$ であるには

$$x = x_* + A\sin(\omega t),\ A = v_0/\omega = v_0\sqrt{2m/k}$$



2. (a) 原点 O の周りに半径 r の球面を考えると，電場は球面に垂直に外向きに E であり，Gauss の法則より

$$4\pi r^2\epsilon_0 E = Q$$

となる。従って，

$$\boldsymbol{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{r}$$

(b) 点電荷 q に働く力は $\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E}$ なので，

$$W = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_a^b \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r^2}\mathrm{d}r = \left[-\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r}\right]_a^b = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$$

3. A→B の変化：断熱なのでエントロピーは変化しない。圧縮で圧力は上昇し，受けた仕事だけ内部エネルギーが増える。理想気体の内部エネルギーは温度に比例するので，温度も上昇する。
B→C の変化：等温膨張では温度は変化せず内部エネルギーは変化しない。すなわち，外へした仕事の分だけ熱が流入し，エントロピーが増大する。また，膨張のため圧力は低下するが，C の温度は B に等しく A より高いので，C の圧力も A より高い。従って，

$$T_{\mathrm{A}} < T_{\mathrm{B}} = T_{\mathrm{C}},\ P_{\mathrm{A}} < P_{\mathrm{C}} < P_{\mathrm{B}},\ S_{\mathrm{A}} = S_{\mathrm{B}} < S_{\mathrm{C}}$$

解答例

問1

$$
\begin{aligned}
e^{i\theta} &= 1+\frac{i\theta}{1!}+\frac{(i\theta)^2}{2!}+\frac{(i\theta)^3}{3!}+\frac{(i\theta)^4}{4!}+\frac{(i\theta)^5}{5!}+\ldots..\\
&= \left(1-\frac{\theta^2}{2!}+\frac{\theta^4}{4!}-\ldots..\right)+i\left(\frac{\theta}{1!}-\frac{\theta^3}{3!}+\frac{\theta^5}{5!}+\ldots..\right)\\
&= \cos\theta+i\sin\theta
\end{aligned}
$$

問2

固有値を λ、固有ベクトルを $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ と置く（ただし $\boldsymbol{X}\neq\boldsymbol{0}$）。$\boldsymbol{AX}=\lambda\boldsymbol{X}$ が成立することから、次式が成り立つ。

$$
\begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ -b & a-\lambda \end{pmatrix}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}'\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

これを満たすためには $\det\boldsymbol{A}'=0$ でなければならないので、固有値は以下の様に得られる。

$$
\det\boldsymbol{A}'=(a-\lambda)^2+b^2=\lambda^2-2a\lambda+a^2+b^2=0
$$

$$
\lambda=a+ib, a-ib
$$

また、これら固有値に対する固有ベクトルは、$b\neq 0$ の場合でそれぞれ $(1,i)$, $(1,-i)$ となる（規格化は不要）。$b=0$ の場合は $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ ではない任意のベクトルが固有ベクトルとなる。

問3

まず同次方程式 $RdI/dt+I/C=0$ の一般解を求める。A を任意定数とすると $I(t)=Ae^{-t/RC}$ となる。次に定数変化法を用いて、元の方程式の一般解を求める。$I(t)=A(t)e^{-t/RC}$ とすると次式が得られる。

$$
\frac{dA}{dt}=\frac{1}{R}\frac{dV}{dt}e^{t/RC} \qquad A(t)=\frac{1}{R}\int\frac{dV}{dt}e^{t/RC}dt+B \qquad (B\text{ は任意定数})
$$

以上により、次の一般解が得られる。

$$
I(t)=Be^{-t/RC}+\frac{1}{R}e^{-t/RC}\int e^{t/RC}\frac{dV}{dt}dt
$$