平成２４年度

鹿児島大学編入学試験
理学部数理情報科学学科

数学

平成２３年１０月１９日（水）９：００～１１：００

注意

1. 配布物は，問題冊子 (A4, 3 枚)，解答用紙 (B4, ４枚)，草案用紙 (B4, ４枚) です.
2. 試験開始の合図があるまで問題冊子を開いてはいけません.
3. 出題数は$\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$の４題で，４題とも解答してください.
4. 試験開始後，すべての解答用紙に受験番号を記入してください.
5. 解答用紙が不足する場合には裏面を使用することができます.
6. 問題冊子と草案用紙は持ち帰ってください.

$\boxed{1}$ 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & -6 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ について, 次の各問いに答えよ.

(1) A の固有値と各固有値に対する固有空間を求めよ.

(2) 行列 A が対角化可能ならば, A を対角化する行列 P を求めて, A を対角化せよ.

$\boxed{2}$ $\boldsymbol{R}^3$ を3次元実数ベクトル空間, $k \in \boldsymbol{R}$ を定数とし, 写像 $f : \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^3$ を

$$\boldsymbol{R}^3 \ni \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \overset{f}{\mapsto} \begin{pmatrix} x_1 + x_2 - x_3 \\ -x_2 + 2x_3 \\ x_1 + x_3 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3$$

で定義するとき, 次の各問いに答えよ.

(1) f が線形写像になるように定数 k の値を定めよ.

以下, k は (1) で求めた値とし, f は線形写像とする.

(2) f の核 $\mathrm{Ker}\, f$ を求めよ.

(3) f の像 $\mathrm{Im}\, f$ の基底を1組求めよ.

(4) (3) で求めた基底を含む $\boldsymbol{R}^3$ の基底を1組求めよ.

$\boxed{3}$ a を正定数とし，$D = \{(x, y) \mid 0 \leqq x, y \leqq a\}$ とする．以下の各問いに答えよ．

(1) D と $y = x^2$ のグラフを一緒に図示せよ．

(2) D 上の 2 変数関数 $f(x, y)$ を

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 & (x^2 \geqq y) \\ y & (x^2 < y) \end{cases}$$

と定義する．定積分

$$\iint_D f(x, y)\,dxdy$$

を求めよ．

$\boxed{4}$ 数列 $a_n = n \sin\left(\frac{1}{n}\right)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ について考察する．以下の各問いに答えよ．

(1) $\lim_{n \to \infty} a_n$ を求めよ．

(2) 任意の実数 x を固定し $F(t) = \sin(tx)$ とする．$F(0), F(1)$, $F'(t)$ を求めよ．

(3) $\sin x = x \int_0^1 \cos(tx)dt$ を示せ．

(4) $a_n < a_{n+1}$ となることを示せ．

平成２４年度鹿児島大学編入学試験理学部数理情報科学科 解答例

$\boxed{1}$ 行列 $A=\begin{pmatrix} 1 & 6 & -6 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ について, 次の各問いに答えよ.

(1) A の固有値と各固有値に対する固有空間を求めよ.
解. E を３次の単位行列とする. A の固有多項式は

$$det\,(tE-A)=det\begin{pmatrix} t-1 & -6 & 6 \\ -1 & t-2 & -2 \\ 1 & -2 & t-2 \end{pmatrix}=(t-4)^2(t+3)$$

なので A の固有値は 4(重複度 2) と-3 である.
固有値４に対する固有ベクトルを ${}^t(x,\,y,\,z)$ とすると

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & -6 & 6 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=(x-2y+2z)\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

より $x-2y+2z=0$. したがって
$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2y-2z \\ y \\ z \end{pmatrix}=y\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+z\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ で ${}^t(2,\,1,\,0)$ と ${}^t(-2,\,0,\,1)$ は一次独立なので４に対する固有空間は

$$W_4=\{\alpha\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\mid \alpha,\,\beta\in \boldsymbol{C}\}$$

同様にして -3 に対する固有ベクトルを ${}^t(x,\,y,\,z)$ とすると $x+3y=0,\ y+z=0$ より $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=$
$y\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ で固有空間は $W_{-3}=\{\alpha\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\mid \alpha\in \boldsymbol{C}\}$.

(2) 行列 A が対角化可能ならば, A を対角化する行列 P を求めて, A を対角化せよ.
解. $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ は一次独立なので, $P=\begin{pmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ は正則行列で,

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$\boxed{2}$ $\boldsymbol{R}^3$ を３次元実数ベクトル空間, $k\in\boldsymbol{R}$ を定数とし, 写像 $f:\boldsymbol{R}^3\to\boldsymbol{R}^3$ を

$$\boldsymbol{R}^3\ni\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\overset{f}{\mapsto}\begin{pmatrix} x_1+x_2-x_3 \\ -x_2+2x_3 \\ x_1+x_3 \end{pmatrix}+k\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\in\boldsymbol{R}^3$$

で定義するとき, 次の各問いに答えよ.

(1) f が線形写像になるように定数 k の値を定めよ.

解. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ とおくと

$f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} + k\boldsymbol{b}$ と表される.

f が線形写像ならば $f(0) = \boldsymbol{0}$ なので, $k\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ したがって, $k = 0$ である. $k = 0$ のとき, $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ なので $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}^3$ と $c \in \boldsymbol{R}$ に対して

$$f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = A(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = A\boldsymbol{x} + A\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y}),\ f(c\boldsymbol{x}) = A(c\boldsymbol{x}) = cA\boldsymbol{x} = cf(\boldsymbol{x})$$

よって, f は線形写像である. ゆえに, $k = 0$ である.

(2) $Ker\, f$ を求めよ.

解. $k = 0$ より $Ker\, f \ni \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ ならば, $\begin{pmatrix} x_1 + x_2 - x_3 \\ -x_2 + 2x_3 \\ x_1 + x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ より, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$. よって, $Ker\, f = \{\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \mid \alpha \in \boldsymbol{R}\}$.

(3) $Im\, f$ の基底を 1 組求めよ.

解. $\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ とすると

$Im\, f = \{x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + x_3\boldsymbol{a}_3 \mid x_1, x_2, x_3 \in \boldsymbol{R}\}$.

$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ は一次独立で $\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{a}_1 - 2\boldsymbol{a}_2$ なので $Im\, f = \{\alpha\boldsymbol{a}_1 + \beta\boldsymbol{a}_2 \mid \alpha, \beta \in \boldsymbol{R}\}$ したがって $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2\}$ は $Im\, f$ の 1 組の基底である.

(4) (3) で求めた基底を含む $\boldsymbol{R}^3$ の基底を 1 組求めよ.

解. $,\alpha\boldsymbol{a}_1 + \beta\boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} \alpha+\beta \\ -\beta \\ \alpha \end{pmatrix}$ より $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \notin Im\, f$. よって, $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ とおくと, $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}$ は一次独立で $dim\boldsymbol{R}^3 = 3$ より $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}\}$ は $\boldsymbol{R}^3$ の 1 組の基底である.

3 a を正定数とし，$D = \{(x, y) \mid 0 \leqq x, y \leqq a\}$ とする．以下の各問いに答えよ．

(1) D と $y = x^2$ のグラフを一緒に図示せよ．

(2) D 上の 2 変数関数 $f(x, y)$ を

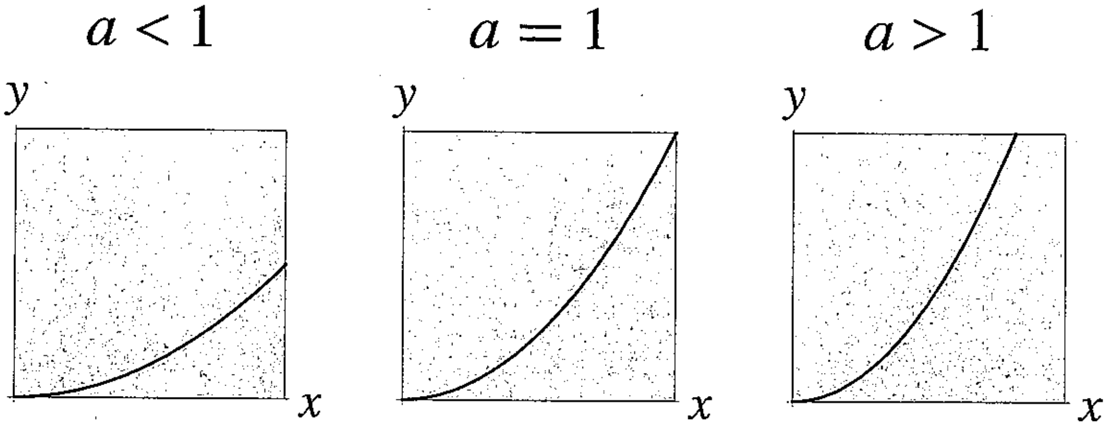
$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 & (x^2 \geqq y) \\ y & (x^2 < y) \end{cases}$$

と定義する．定積分

$$\iint_D f(x,y)dxdy$$

を求めよ．

解答例 (1) 商用計算機ソフト MATHEMATICA で作成した図を示す：



(2) $a < 1$ の場合と $a \geqq 1$ の場合に分けて計算する．

* $a < 1$ **の場合**．D を D_1 と D_2 に分ける：

$$D_1 = \{(x, y) \mid 0 \leqq x \leqq a, x^2 \leqq y \leqq a\}, \quad D_2 = \{(x, y) \mid 0 \leqq x \leqq a, 0 \leqq y \leqq x^2\}.$$

$(x, y) \in D_1$ のとき $f(x, y) = y$, $(x, y) \in D_2$ のとき $f(x, y) = x^2$ であり，D_1 と D_2 をそれぞれ縦線領域とみることにより，

$$\begin{aligned}
\iint_D f(x,y)dxdy &= \iint_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint_{D_2} f(x,y)dxdy \\
&= \int_0^a \left\{ \int_{x^2}^a y dy \right\} dx + \int_0^a \left\{ \int_0^{x^2} x^2 dy \right\} dx \\
&= \int_0^a \left[\frac{y^2}{2} \right]_{x^2}^a dx + \int_0^a x^4 dx \\
&= \int_0^a \left(\frac{a^2}{2} - \frac{x^4}{2} + x^4 \right) dx \\
&= \int_0^a \left(\frac{a^2}{2} + \frac{x^4}{2} \right) dx \\
&= \frac{a^3}{2} + \frac{a^5}{10}.
\end{aligned}$$

* $a \geqq 1$ **の場合**. D を D_3 と D_4 に分ける：

$$D_3 = \{(x,y) \mid 0 \leqq y \leqq a, 0 \leqq x \leqq \sqrt{y}\}, \quad D_4 = \{(x,y) \mid 0 \leqq y \leqq a, \sqrt{y} \leqq x \leqq a\}.$$

$(x,y) \in D_3$ のとき $f(x,y) = y$, $(x,y) \in D_4$ のとき $f(x,y) = x^2$ であり，D_3 と D_4 をそれぞれ横線領域とみることにより，

$$\begin{aligned}
\iint_D f(x,y)dxdy &= \iint_{D_3} f(x,y)dxdy + \iint_{D_4} f(x,y)dxdy \\
&= \int_0^a \left\{ \int_0^{\sqrt{y}} ydx \right\} dy + \int_0^a \left\{ \int_{\sqrt{y}}^a x^2 dx \right\} dy \\
&= \int_0^a y^{3/2} dy + \int_0^a \left[\frac{x^3}{3} \right]_{\sqrt{y}}^a dy \\
&= \int_0^a y^{3/2} dy + \int_0^a \left(\frac{a^3}{3} - \frac{y^{3/2}}{3} \right) dy \\
&= \int_0^a \left(\frac{a^3}{3} + \frac{2y^{3/2}}{3} \right) dy \\
&= \frac{a^4}{3} + \frac{4a^{5/2}}{15}.
\end{aligned}$$

$\boxed{4}$ 数列 $a_n = n \sin\left(\frac{1}{n}\right), n = 1, 2, 3, \ldots$ について考察する．以下の各問いに答えよ．

(1) $\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ．

(2) 任意の実数 x を固定し $F(t) = \sin(tx)$ とする．$F(0), F(1), F'(t)$ を求めよ．

(3) $\sin x = x \int_0^1 \cos(tx)dt$ を示せ．

(4) $a_n < a_{n+1}$ となることを示せ．

解答例 (1) a_n は $\sin x$ の $x = 0$ と $x = 1/n$ の間の平均変化率であり，$1/n \to 0 \ (n \to \infty)$ であるから，

$$a_n = \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right) - \sin 0}{\frac{1}{n} - 0} \to \frac{d}{dx} \sin x \Big|_{x=0} = \cos 0 = 1 \qquad (n \to \infty).$$

(2) $F(1) = \sin x, F(0) = 0$ である．また，合成関数の微分法により $F'(t) = x\cos(tx)$ である．

(3) (2) の結果を利用して，$F(t)$ に閉区間 $[0,1]$ で微分積分学の基本定理を適用すると

$$\sin x = F(1) - F(0) = \int_0^1 F'(t)dt = x \int_0^1 \cos(tx)dt.$$

(4) (3) の結果を用いると，a_n は

$$a_n = \int_0^1 \cos\left(\frac{t}{n}\right) dt$$

と表される．$0 < x \leqq 1$ のとき $\dfrac{d}{dx}\cos x = -\sin x < 0$ であるから $\cos x$ は狭義単調減少である．$0 < t \leqq 1,\ n = 1, 2, 3, \ldots$ のとき，$0 < \dfrac{t}{n+1} < \dfrac{t}{n} \leqq 1$ であるから，$\cos\left(\dfrac{t}{n+1}\right) > \cos\left(\dfrac{t}{n}\right)$ となるので

$$a_{n+1} = \int_0^1 \cos\left(\frac{t}{n+1}\right) dt > \int_0^1 \cos\left(\frac{t}{n}\right) dt = a_n.$$