鹿児島大学理学部編入学試験　物理科学科

平成27年度 入学試験問題

数学・物理

平成26年10月22日（水）　09:00 - 11:00

配布物

- 問題用紙（この冊子）：3枚
- 解答用紙（6枚）…分野・問題番号ごとに1枚ずつ
- 下書き用紙（2枚）

注意事項

1. 「解答はじめ」の合図があるまで、この問題用紙を開かないこと。
2. 問題番号　数学問題１～問題３，物理問題【１】～問題【３】の全てに解答すること。
3. 解答は問題番号ごとに所定の解答用紙に記入すること。
4. 全ての解答用紙には受験番号と氏名を記入すること。
5. 解答用紙は裏面を使っても構わない。
6. 下書き用紙・解答用紙が足りなくなったら試験監督に申し出ること。
7. 解答には導出過程も記述すること。
8. 解答は白紙でも、全ての解答用紙を提出すること。

【数学】

以下の問いに答えよ。答案は、思考過程が分かるように書くこと。

問題1

原点 O を通る直線上の、O から距離 s だけ離れた位置に点 P と Q をとる（図 1)。点 O, P, Q から点 R までの距離をそれぞれ r, r_1, r_2 とするとき、r_1 と r_2 の逆数の差は、O, P, Q が並ぶ直線と O と R を結ぶ直線のなす角 θ を用いて

$$\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + s^2 - 2rs\cos\theta}} - \frac{1}{\sqrt{r^2 + s^2 + 2rs\cos\theta}}$$

と表される。R が O から十分遠方 $(r \gg s)$ にある時、

$$\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \simeq \frac{2s\cos\theta}{r^2}$$

と近似できることを示せ。

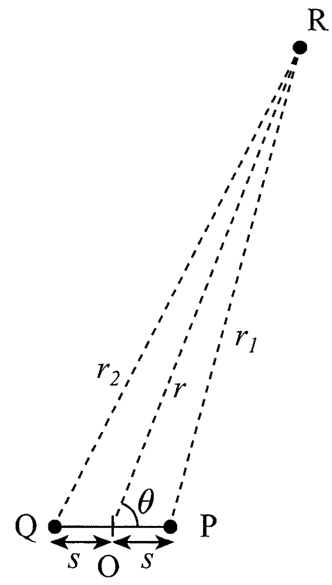


図 1

問題2

3 点 A(-1,1,2), B(-1,-1,1), C(2,2,1) からなる 3 角形がある。

(1) この 3 角形の面積を求めよ。

(2) この 3 角形と xy 面がなす角を求めよ。求める角度を θ として $\cos\theta$（或いは $\sin\theta$）の値を答えても良い。

問題3

次の微分方程式の解のうち、指定された初期条件を満たす解 $x(t)$ を求めよ。ただし、x', x'' などは t についての微分を表すものとする。

$$x'' + 2x' + x = \sin t \qquad \left[\text{初期条件}: x(0) = 2, x'(0) = -1\right]$$

【物理】

（注意）　解答はすべて計算の途中経過を含めて書くこと。

【1】 速度の2乗に比例した抵抗力（比例定数c）を受けて、落下する質点（質量m）がある。重力加速度をgとしたとき、

(1) 質点に働く力を図にしたうえで、質点がしたがう運動方程式を書き下せ。

(2) 質点の終端速度を求めよ。

(3) 質点の落下速度の時間変化のグラフの概形をかけ。ただし、$c = 0$の場合と$c \neq 0$の場合の両方を一つの図に示すこと。

【2】 半径aの球内に一様に電荷が分布している。全電荷の量をqとしたとき、

(1) rを球の中心からの距離としたとき、球の内側と外側の電場$E(r)$をそれぞれ求め、グラフに示せ。

(2) この電荷による静電場エネルギーU_e

$$U_e = \frac{\epsilon_0}{2}\int E(r)^2 dV$$

を計算せよ。ここで、ϵ_0は真空の誘電率である。

【3】 内部エネルギーをU、体積をV、温度をT、定積比熱をc_v、定圧比熱をc_pとすると、熱力学第一法則から、理想気体の場合、

$$dQ = c_v dT + (c_p - c_v)TdV/V$$

がなりたつ。このとき、エントロピーが一定の場合、TとVの関係式を求めよ。

【数学】 解答例

問題1

各項 s/r で1次まで展開して差をとれば良い。

$$\frac{1}{r_1}=\frac{1}{r}\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{s}{r}\right)^2-2\frac{s}{r}\cos\theta}}=\frac{1}{r}\left(1-\frac{1}{2}\left(-2\cos\theta\right)\frac{s}{r}\right)=\frac{1}{r}\left(1+\cos\theta\right)\frac{s}{r}$$

同様に $\dfrac{1}{r_2}=\dfrac{1}{r}\left(1-\cos\theta\right)\dfrac{s}{r}$ だから、

$$\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}=\frac{1}{r}2\cos\theta\frac{s}{r}$$

問題2

(1) 求める三角形の面積を S とすると、ベクトルの外積を使って $S=\dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$ と計算できる。

$$\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-2\\-1\end{pmatrix},\ \overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\1\\-1\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}0\\-2\\-1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}3\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-3\\6\end{pmatrix}$$

より、$\underline{S=\dfrac{1}{2}\sqrt{9+9+36}=3\sqrt{\dfrac{3}{2}}}$

(2)(1) で求めた $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$（三角形面に垂直）と z 軸のなす角を計算すれば良い。求める角度を θ とすれば、これらのベクトルの内積から、

$$\underline{\cos\theta=\frac{1}{3\sqrt{6}}\begin{pmatrix}3\\-3\\6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\frac{\sqrt{6}}{3}}$$

問題3

特性方程式の解は-1で重解。したがって、斉次方程式の一般解は

$$x(t)=(C_1+C_2t)\mathrm{e}^{-t}$$

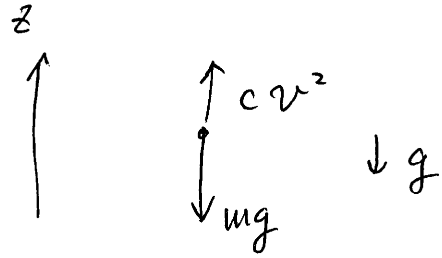
非斉次方程式の特解を $x(t)=h_1\sin t+h_2\cos t$ の形に仮定して与式に代入し、係数を比較すれば $h_1=0,\ h_2=-1/2$。したがって一般解は

$$x(t)=(C_1+C_2t)\mathrm{e}^{-t}-\frac{1}{2}\cos t$$

初期条件より $C_1=5/2,\ C_2=3/2$ と決まるので、求める解は

$$\underline{x(t)=\frac{1}{2}(5+3t)\mathrm{e}^{-t}-\frac{1}{2}\cos t}$$

【物理】　【解答例】

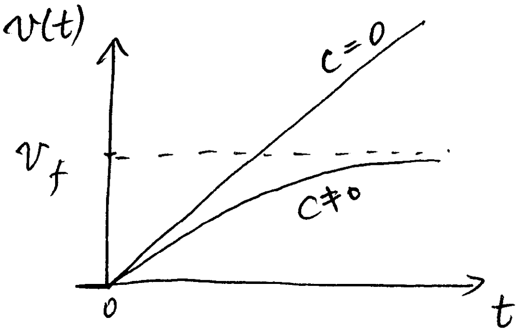


【1】

(1) $m\frac{dv}{dt} = mg - cv^2$.

(2) $dv/dt =$ なので、 $v_f = \sqrt{mg/c}$.

(3)

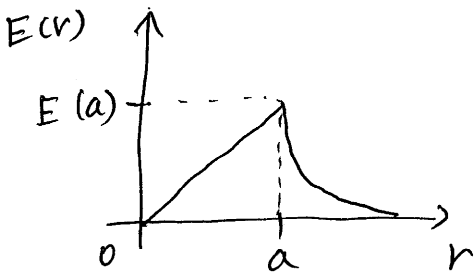


【2】

(1)　$r > a$ では、ガウスの法則から $4\pi r^2 E(r) = q/\epsilon_0$ なので、$E_{r>a}(r) = q/4\pi\epsilon_0 r^2$.
$r < a$ では、r 内の電荷の量 $q(r)$ は、$q(r) = qr^3/a^3$ なので、ガウスの法則から、
$4\pi r^2 E(r) = q(r)/\epsilon_0$. 従って、$E_{r<a}(r) = qr/4\pi\epsilon_0 a^3$.

(2)

$$U_e = \frac{\epsilon_0}{2}\left(\int_0^a E_{r<a}^2 4\pi r^2 dr + \int_a^\infty E_{r>a}^2 4\pi r^2 dr\right) = \frac{3q^2}{20\pi\epsilon_0 a}.$$



【3】

$dQ = 0$ より、

$$dT/T = (1 - c_p/c_v)dV/V$$

両辺を積分して、

$$\ln T = (1 - c_p/c_v)\ln V$$

よって、$T = V^{1-c_p/c_v}$. (あるいは、$TV^{c_p/c_v - 1} = const.$)