

平成29年度鹿児島大学AO入学試験 適性試問

[理学部 数理情報科学科]

平成28年11月21日(13:30～16:00)

注 意 事 項

1. 「解答始め」の合図があるまでこの冊子は開かないこと。
2. 配布物は、問題冊子1部、解答用紙5枚、草案用紙5枚である。
3. 問題は **1** ～ **5** の計5題ある。すべてについて解答すること。
4. 5枚の解答用紙には、**1** ～ **5** の問題番号が書いてある。それぞれの解答用紙に解答すること。
5. 受験番号は、必ず5枚の解答用紙のそれぞれに記入すること。
6. 解答は所定の解答用紙の解答欄に記入し終えるようにし、裏面には決して記入しないこと。
7. この試問では、論理的思考力、論証の記述力を主に評価する。したがって、解答は論証および計算の進め方がはっきり分かるように、順序よく的確に表現すること。また、文字は丁寧に書くこと。
8. 問題冊子と草案用紙は、各自持ち帰ること。

1 次の各問いに答えよ.

- (1) 実数 x, y が $x + y \geq 2$ を満たすならば, $x \geq 1$ または $y \geq 1$ が成り立つことを示せ.
- (2) 10進法で表された数 1000 を n 進法で表すと $1331_{(n)}$ となった. n はいくつか.
- (3) $-3 \leq m \leq n \leq 3$ と $\cos \frac{m\pi}{6} \cos \frac{n\pi}{6} = \frac{1}{4}$ を満たす整数 m, n の組 (m, n) をすべて求めよ.

2 n を正の整数とし, 関数 $f(x) = \frac{1}{x}$ ($x > 0$), $g_n(x) = \frac{x^2}{n}$ ($x \geq 0$) を考える.

- (1) xy 平面上の曲線 $y = f(x)$ と $y = g_n(x)$ の共有点の座標を n を用いて表せ.
- (2) $n < m$ のとき, 3つの曲線 $y = f(x)$, $y = g_n(x)$, $y = g_m(x)$ で囲まれた部分の面積 $S_{n,m}$ を求めよ.
- (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} nS_{n,n+1}$ を求めよ.

3 平面上に三角形 APQ がある. ただし, $\angle P$ と $\angle Q$ は直角ではないとする. 線分 AP 上に点 A, P 以外の点 B をとり, 線分 AQ 上に点 A, Q 以外の点 C をとり. また, 線分 BQ と線分 CP の交点を D とする.

- (1) $AB:BP = a:b$, $AC:CQ = c:d$ のとき, $PD:DC$ を求めよ.

次に, 平面上に点 A, P, Q 以外の点 E をとり. ただし, 線分 AE は直線 PQ と, 点 E 以外の点で垂直に交わるとする. また, 点 B を通って線分 AE に平行な直線と線分 EP の交点を F とし, 点 C を通って線分 AE に平行な直線と線分 EQ の交点を G とする. さらに, 線分 GP と線分 FQ の交点を H とする.

- (2) 線分 DH と線分 AE が平行であることを示せ.

4 青玉 3 個と赤玉 3 個が入った袋がある。袋から玉をひとつ取り出し、取り出した玉が青玉なら赤く塗って赤玉にして袋に戻し、取り出した玉が赤玉ならそのまま袋に戻す。この操作を繰り返し、すべての玉が赤玉になったら操作を終了する。操作が n 回目で終了する確率を p_n とする。ただし、どの玉が取り出される確率も等しいとする。

(1) p_3 を求めよ。

n 回目の操作が終わった時点で袋の中の青玉の個数が k 個 ($1 \leq k \leq 3$) である確率を $q_n(k)$ とおく。

(2) $q_1(1), q_1(2), q_1(3)$ を求めよ。

(3) $q_n(k)$ ($n \geq 2, k = 1, 2$) を、 $q_{n-1}(k), q_{n-1}(k+1)$ を用いて表せ。

(4) $q_2(1), q_2(2), q_2(3)$ を求めよ。

(5) p_4 を求めよ。

5 3 辺の長さがすべて整数の直角三角形をピタゴラス三角形という。次の各問いに答えよ。

(1) ピタゴラス三角形の例を具体的にひとつあげよ。

(2) ピタゴラス三角形の 3 辺のうち、少なくとも 1 辺の長さは偶数である。このことを示せ。

(3) ピタゴラス三角形の 3 辺のうち、少なくとも 1 辺の長さは 3 の倍数である。このことを示せ。

(4) ピタゴラス三角形の内接円の半径は整数である。このことを示せ。

平成 29 年度 AO 入試・解答

1

- (1) 省略
- (2) $n = 9$
- (3) $(m, n) = (-2, -2), (-2, 2), (2, 2)$

2

- (1) $(n^{\frac{1}{3}}, n^{-\frac{1}{3}})$
- (2) $\frac{1}{3} \log \left(\frac{m}{n} \right)$
- (3) $\frac{1}{3}$

3

- (1) $(bc + bd) : ad$
- (2) 省略

4

- (1) $p_3 = \frac{1}{36}$
- (2) $q_1(1) = 0, q_1(2) = \frac{1}{2}, q_1(3) = \frac{1}{2}$
- (3) $q_n(k) = \frac{6-k}{6} q_{n-1}(k) + \frac{k+1}{6} q_{n-1}(k+1)$
- (4) $q_2(1) = \frac{1}{6}, q_2(2) = \frac{7}{12}, q_2(3) = \frac{1}{4}$
- (5) $p_4 = \frac{1}{18}$

5

- (1) 3 辺の長さが 3, 4, 5 であるような三角形.
- (2) 省略
- (3) 省略
- (4) 省略