鹿児島大学理学部　物理科学科

平成29年度 編入学試験問題

平成28年10月26日（水）　9:00 - 11:00

配布物

・問題用紙（この冊子）：2枚

・解答用紙（4枚）…問題番号ごとに1枚ずつ

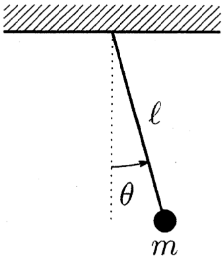
・下書き用紙（4枚）

注意事項

1. 「解答はじめ」の合図があるまで、この問題用紙を開いてはいけません。
2. 問題番号【１】から【４】の全てに解答すること。
3. 解答は問題番号ごとに所定の解答用紙に記入すること。
4. 全ての解答用紙には受験番号と氏名を記入すること。
5. 解答用紙は裏面を使っても構いません。
6. 下書き用紙・解答用紙が足りなくなったら試験監督に申し出ること。
7. 解答には導出過程も記述すること。
8. 解答は白紙でも、全ての解答用紙を提出すること。

平成 29 年度　編入学試験問題

1. 質量 m の質点と長さ ℓ で質量を無視できる棒からなる振り子が鉛直面内で運動している (図参照)。次の各問いに答えなさい。ただし，空気抵抗や摩擦は無視できるものとする。



(a) 質点の位置を図のように鉛直下向きからの角 θ で表すと，その運動は

$$\ddot{\theta} = -\omega^2 \sin\theta,\ \omega = \ldots$$

に従う。これを導きなさい。ω も求めること。

(b) $\theta \ll 1$ で $\sin\theta = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \theta^n$ のようにテーラー展開する。a_n を求めなさい。

(c) (a) の微分方程式を $\sin\theta \simeq \theta$ と近似し，その一般解を求めなさい。続いて，時刻 $t = 0$ で $\theta = a, \dot{\theta} = 0$ を満たす解を求めなさい。

(d) (c) の場合，棒に働いている張力の大きさを θ の関数として求めなさい。

2. 行列

$$A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & -1 & -3 \\ 2 & 3 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

について，次の各問いに答えなさい。

(a) $\boldsymbol{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ である。$A\boldsymbol{e}_1$ を求めなさい。

(b) 2 つの単位ベクトル $\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ は，$A\boldsymbol{e}_j = \lambda_j \boldsymbol{e}_j, (j = 2, 3)$ を満たし，$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ は互いに平行でない。λ_2, λ_3 を求めなさい。

(c) ベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ を $\boldsymbol{x} = \sum_{j=1}^{3} a_j \boldsymbol{e}_j$ と展開する。a_j を求めなさい。更に $\lim_{n\to\infty} A^n \boldsymbol{x}$ を $a_j, \boldsymbol{e}_j$ を用いて答えなさい。

3. 静電場 $E(x, y, z)$ がスカラーポテンシャル $\phi(x, y, z)$ で $\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla}\phi$ と表される。$\phi(x, y, z) = \frac{A}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ について，$\boldsymbol{E}$ を求めなさい。また，電場 $\boldsymbol{E}$ 中に微小電荷 q を置く。電荷に働く力を答えなさい。

4. 次の各問いに答えなさい。

(a) 自然数 m, n に対し

$$\int_0^{2\pi} \cos mx \mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} \sin mx \mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} \cos mx \sin nx \mathrm{d}x = 0$$

および

$$\int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx \mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} \sin mx \sin nx \mathrm{d}x = \begin{cases} \pi, (m = n) \\ 0, (m \neq n) \end{cases}$$

を示しなさい。

(b) 周期 2π の周期関数 $f(x)$ が

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

と表されるとする。(a) で示した関係式を用いて,

$$\int_0^{2\pi} f(x) \cos nx \mathrm{d}x \quad \text{および} \quad \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx \mathrm{d}x$$

を求めなさい。

(c) $f(x)$ をヘヴィサイド関数

$$f(x) = \begin{cases} 1, (0 \leq x < \pi) \\ 0, (\pi \leq x < 2\pi), \end{cases} \quad f(x \pm 2\pi) = f(x)$$

とし,前問の a_n, b_n を求めなさい。

解答

1. (a) 振り子の支点を原点とした極座標 (r, θ) を用いると，質点に働く力は

$$-mg\sin\theta\boldsymbol{e}_\theta + (mg\cos\theta - S)\boldsymbol{e}_r$$

となる ($\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\theta$ は r, θ 方向の単位ベクトルで，S は棒の張力)。
質点の加速度は

$$\ell\ddot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta - \ell\dot{\theta}^2\boldsymbol{e}_r$$

なので，運動方程式の θ 方向成分は

$$m\ell\ddot{\theta} = -mg\sin\theta$$

よって

$$\ddot{\theta} = -\omega^2\sin\theta, \omega = \sqrt{g/\ell}$$

(b) $\theta = 0$ のまわりで Taylor 展開して

$$a_{2n} = 0, a_{2n+1} = \frac{\mathrm{d}^{2n+1}}{\mathrm{d}\theta^{2n+1}}f(\theta)|_{\theta=0}/(2n+1)! = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}, (n = 0, 1, 2, \dots)$$

(c) $\sin\theta \simeq \theta$ とすると

$$\ddot{\theta} = -\omega^2\theta$$

よって，一般解は，A, ϕ を未定定数として

$$\theta = A\cos(\omega t + \phi)$$

$\dot{\theta} = -A\omega\sin(\omega t + \phi)$ なので，与えられた条件より $A = a, \phi = 0$ となり，解は

$$\theta = a\cos\omega t$$

(d) 運動方程式の r 方向成分は, 張力を S として

$$-m\ell\dot{\theta}^2 = mg\cos\theta - S$$

なので，解より $\dot{\theta}^2 = (-a\omega\sin\omega t)^2 = \dfrac{g}{\ell}(a^2 - \theta^2)$ なので

$$S = mg[\cos\theta + (a^2 - \theta^2)] \simeq mg[1 + a^2 - 3\theta^2/2]$$

【別解】解を使わずにエネルギー保存則を用いると

$$S = mg(3\cos\theta - 2\cos a) \simeq mg[1 + a^2 - 3\theta^2/2]$$

2. (a)

$$Ae_1 = \frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\boldsymbol{e}_1$$

(b) $\lambda_j, \boldsymbol{e}_j$ は固有値，固有ベクトルなので，固有値方程式は

$$(-4\lambda)(3-4\lambda)(1-4\lambda)-3(-4\lambda)-6(3-4\lambda)+2(1-4\lambda) = 32(\lambda-1/2)(-2\lambda^2+\lambda+1) = 0$$

となり，

$$\lambda_2 = -1/2, \lambda_3 = 1$$

となる。

また，各々の固有ベクトルは

$$\boldsymbol{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$$

(c)

$$\boldsymbol{x} = \sum_j a_j \boldsymbol{e}_j = \sqrt{3}(\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3)$$

となり，$a_1 = a_2 = a_3 = 1/\sqrt{3}$ となる。

したがって，$\lambda_1 = 1/2$ と書き，$A\boldsymbol{e}_j = \lambda_j \boldsymbol{e}_j, (j = 1, 2, 3)$ に注意すると

$$\lim_{n\to\infty} A^n \boldsymbol{x} = \lim_{n\to\infty} \sum_j \lambda_j^n a_j \boldsymbol{e}_j = a_3 \boldsymbol{e}_3$$

3.

$$\boldsymbol{E} = A/r^2 \cdot (x, y, 0)/r, r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

で電荷 q に働く力は

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E}$$

4. (a) $y = \sin mx, \cos mx$ は

$$\int_0^{2\pi} \sin mx \mathrm{d}x = m\int_0^{2\pi/m} \sin mx \mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} \sin\theta \mathrm{d}\theta = 0$$

同様に

$$\int_0^{2\pi} \cos mx \mathrm{d}x = 0$$

次に

$$\int_0^{2\pi} \cos mx \sin nx \mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} \frac{\sin(m+n)x - \sin(m-n)x}{2} \mathrm{d}x = 0$$

更に

$$\int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx \mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} \frac{\cos(m+n)x + \cos(m-n)x}{2} \mathrm{d}x = \begin{cases} \pi, (m=n) \\ 0, (m \neq n) \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \sin mx \sin nx \mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} \frac{\cos(m+n)x - \cos(m-n)x}{2} \mathrm{d}x = \begin{cases} \pi, (m=n) \\ 0, (m \neq n) \end{cases}$$

(b)

$$\int_0^{2\pi} f(x) \cos nx \mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} [a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)] \cos nx \mathrm{d}x = \pi a_n$$

$$\int_0^{2\pi} f(x) \sin nx \mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} [a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)] \sin nx \mathrm{d}x = \pi b_n$$

(c)

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{2\pi} \cos nx \mathrm{d}x = \begin{cases} 1, (n=0) \\ 0, (n \neq 0) \end{cases}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{2\pi} \sin nx \mathrm{d}x = \begin{cases} 0, (n = \text{even}) \\ -\dfrac{2}{n\pi}, (n = \text{odd}) \end{cases}$$