平成30年度鹿児島大学AO入学試験
適性試問

[理学部 数理情報科学科]

平成29年11月20日（9:30 ～ 12:00）

注　意　事　項

1. 「解答始め」の合図があるまでこの冊子は開かないこと。
2. 問題は $\boxed{\mathbf{1}}$ ～ $\boxed{\mathbf{5}}$ の計5題ある。すべてについて解答すること。
3. 解答用紙は $\boxed{\mathbf{1}}$ ～ $\boxed{\mathbf{5}}$ の計5枚ある。問題 $\boxed{\mathbf{1}}$ ～ $\boxed{\mathbf{5}}$ について，それぞれの解答用紙に解答すること。
4. 受験番号，氏名は，必ず5枚の解答用紙のそれぞれに記入すること。
5. 解答は所定の解答用紙の解答欄に記入し終えるようにし，裏面には決して記入しないこと。
6. この試問では，論理的思考力，論証の記述力を主に評価する。したがって，解答は論証および計算の進め方がはっきり分かるように，順序よく的確に表現すること。また文字は丁寧に書くこと。

$\boxed{1}$ 次の各問いに答えよ。

(1) $\left(\frac{1}{2}\right)^{20}$ を小数で表したとき，小数第 k 位に初めて 0 でない数字が現れる。k を求めよ。ただし，$\log_{10} 2 = 0.301$ とする。

(2) 平面ベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ について，$|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 1$, $|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{7}$ とし，$\vec{a} + t\vec{b}$ と $2\vec{a} - t\vec{b}$ は垂直であるとする。実数 t の値を求めよ。

(3) n を 2 以上の自然数とする。恒等式 $(1+x)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k\, x^k$ を利用して，等式

$$\sum_{k=1}^{n} k\, {}_n\mathrm{C}_k = n\, 2^{n-1}$$

を示せ。ただし，${}_n\mathrm{C}_k$ は二項係数である。

(4) 複素数平面を考える。$\alpha = 1 - 3i$ とする。方程式 $|z+1|^2 = 2|z|^2$ を満たす点 z 全体のなす図形を C とする。C 上の点で，点 α との距離が最小になるものを求めよ。

$\boxed{2}$ 方程式 $x^2 + 2y^2 = 3$ の表す平面上の曲線を C とする。次の各問いに答えよ。

(1) t を実数とする。C 上の点 $\mathrm{P}(-1, -1)$ を通り傾きが t の直線を L とし，C と L が異なる 2 点で交わるとする。2 つの交点のうち P でないほうを Q とするとき，Q の座標を t を用いて表せ。

(2) 正の整数の組 (l, m, n) で，その最大公約数が 1 であり，さらに

$$l^2 + 2m^2 = 3n^2$$

をみたすものを 3 つ答えよ。

$\boxed{3}$ 素数が無限にあることを証明したい。小さい方から数えて n 番目の素数を p_n と書くことにする。次の各問いに答えよ。

(1) $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6$ をそれぞれ求めよ。

(2) $p_1p_2p_3p_4p_5p_6 + 1$ の素因数はすべて p_6 より大きいことを示せ。

(3) 素数が k 個しかないと仮定して矛盾を導け。ただし，k は自然数とする。

$\boxed{4}$ n を 0 以上の整数とし, 次の関数を考える。

$$f_n(x) = \frac{\sin\{(2n+1)x\}}{\sin x} \qquad (0 < x < \pi)$$

次の各問いに答えよ。

(1) 極限 $\displaystyle\lim_{x \to 0} f_n(x)$ を求めよ。

(2) $n \geqq 1$ とする。次の等式を示せ。

$$f_n(x) - f_{n-1}(x) = 2\cos(2nx)$$

(3) 次の定積分の値を求めよ。

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} f_2(x)\,dx$$

$\boxed{5}$ 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n \qquad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定義する。次の各問いに答えよ。

(1) $f(x) = \log(1+x) - \dfrac{x}{1+x}$ とおく。$x > 0$ のとき $f(x) > 0$ であることを示せ。

(2) (1) の結果を用いて, すべての自然数 n に対して $a_n > a_{n+1}$ であることを示せ。

(3) すべての自然数 n に対して $a_n > 0$ であることを示せ。

2018年度AO・解答例

$\boxed{1}$

(1) $k=7$

(2) $t=\frac{-1\pm\sqrt{33}}{2}$

(3) 略

(4) $1-\sqrt{2}i$

$\boxed{2}$

(1) $(\frac{-2t^2+4t+1}{2t^2+1}, \frac{2t^2+2t-1}{2t^2+1})$

(2) 例えば, $(l,m,n)=(1,1,1),(5,1,3),(1,11,9)$

$\boxed{3}$

(1) 順に $2,3,5,7,11,13$

(2) 略

(3) 略

$\boxed{4}$

(1) $2n+1$

(2) 略

(3) $\frac{\pi}{3}-\frac{3\sqrt{3}}{4}$

$\boxed{5}$

(1) $f'(x)=\frac{x}{(1+x)^2}>0\ (x>0)$ かつ $f(0)=0$ なので, $f(x)>0\ (x>0)$

(2) $a_n-a_{n+1}=\log(1+\frac{1}{n})-\frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}=f(\frac{1}{n})>0$

(3) 略